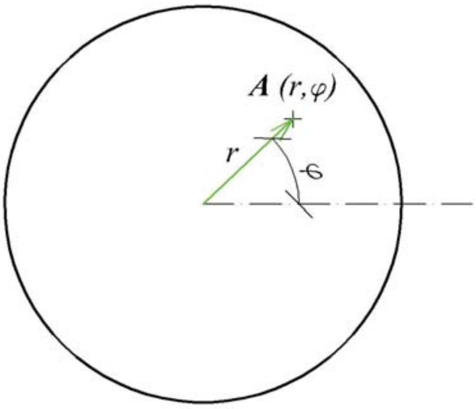
Раван проблем у поларним координатама

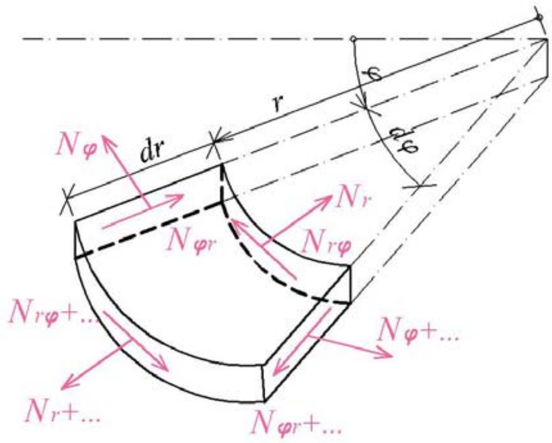
Положај сваке тачке кружне плоче је одређен поларним координатама ***r*** и φ.



Диференцијална једначина напрезања у равни кружне плоче, када је површинско оптерећење ***X=Y=0***,:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right)=0$$

Пресечне силе:



Ротациона симетрија

Када су гранични услови и оптерећење ротационо симетрични, само су функција координате ***r*** , онда диференцијална једначина равног напрезања плоче постаје:

$$\frac{d^4F}{dr^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d^3F}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\cdot\frac{dF}{dr}=0$$

Опште решење ове хомогене диференцијалне једначине је:

$$\boxed{F=D+A\cdot\ln r+B\cdot r^2+C\cdot r^2\cdot\ln r}$$

Изрази за пресечне силе за случај ротационе симетрије:

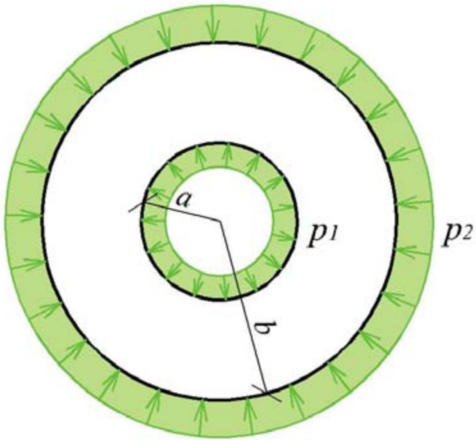
$$N_r=\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}=A\cdot\frac{1}{r^2}+2\cdot B+C\cdot(1+2\cdot\ln r)$$

$$N_\varphi=\frac{d^2F}{dr^2}=-A\cdot\frac{1}{r^2}+2\cdot B+C\cdot(3+2\cdot\ln r)$$

$$N_{r\varphi}\equiv 0$$

Пример 1.

За кружну прстенасту плочу оптерећену константним радијалним оптерећењем, приказану на слици, одредити изразе за пресечне силе.



E=30 Gpa

ν= 0.2

dpl = 0.20 m

p_1= 50 kN/m

p_1= 25 kN/m

a = 2 m

b = 5 m

Решење

Напонска функција је једнака: $F = D + A \cdot \ln r + B \cdot r^2 + C \cdot r^2 \cdot \ln r$. Пошто константа ***D*** не утиче на пресечне силе можемо да усвојимо да је: $D = 0$. Остале три непознате константе ћемо одредити из граничних услова.

Гранични услови:

$$r = a \; \{ \; N_r = -p_1 ....(1)$$

$$r = b \; \{ \; N_r = -p_2 ....(2)$$

Имамо два гранична услова, а три непознате константе, па нам је потребан још један услов који ћемо добити разматрањем деформације плоче.

Компоненталне деформације за случај ротационе симетрије су: $\varepsilon_r = \dfrac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi = \dfrac{u}{r}; \quad \gamma_{r\varphi} \equiv 0$ где је ***u*** радијално померање.

$u = \varepsilon_\varphi \cdot r \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{du}{dr} = \varepsilon_\varphi + r \cdot \dfrac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = \varepsilon_r$ - *услов компатибилности деформација*

Веза између деформација и напона на основу *Hook- овог* закона:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\varphi); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\varphi - \nu \cdot \sigma_r)$$

Напони су равномерно расподељени по дебљини плоче на основу чега следи:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_r - \nu \cdot N_\varphi); \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E \cdot h} \cdot (N_\varphi - \nu \cdot N_r)$$

Када у *услову компатибилности* деформација изразимо преко сила, на основу претходних израза, добијамо:

$$(1+\nu) \cdot (N_\varphi - N_r) + r \cdot \left(\frac{dN_\varphi}{dr} - \nu \cdot \frac{dN_r}{dr} \right) = 0$$

Сада силе изразимо у функцији непознатих константи *A, B* и *C* и претходни израз постаје:

$2 \cdot (1+\nu) \cdot \left(C - \dfrac{A}{r^2} \right) + 2 \cdot r \cdot \left(\dfrac{A}{r^3} + \dfrac{C}{r} + \nu \cdot \left(\dfrac{A}{r^3} - \dfrac{C}{r} \right) \right) = 0$, одакле следи: $C = 0$.

Систем једначина из кога ћемо одредити непознате константе је:

$$A \cdot \frac{1}{2^2} + 2 \cdot B = -50 \; .... (1)$$

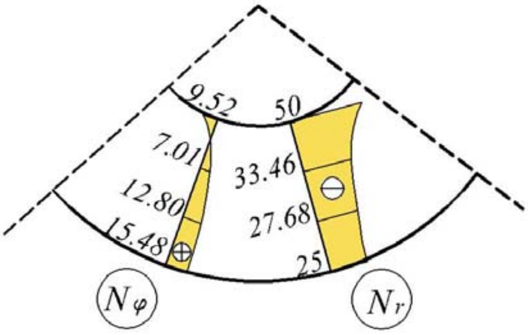
$$A \cdot \frac{1}{5^2} + 2 \cdot B = -25 \; .... (2)$$

Решење овог система је: $A = -119.048; \quad B = -10.119$

Коначни изрази за пресечне силе су:

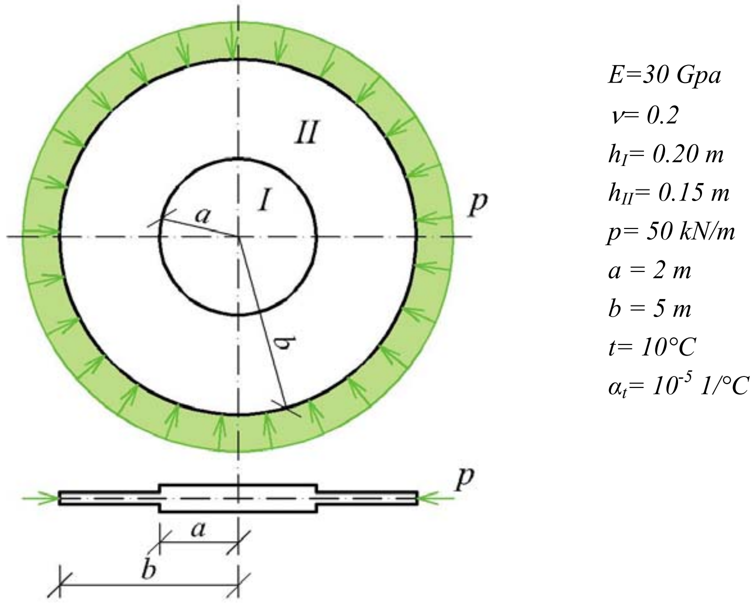
$$N_r = -119.048 \cdot \frac{1}{r^2} - 20.238 \;;\quad N_\varphi = -119.048 \cdot \frac{1}{r^2} + 20.238$$

Дијаграми пресечних сила:



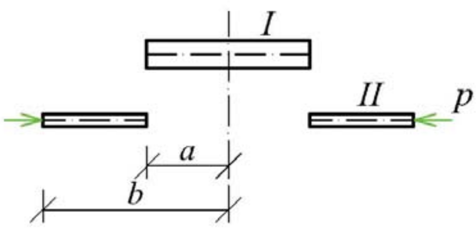
Пример 2.

Услед задатог константног радијалног оптерећења ***p*** и загревања *плоче **I*** срачунати и нацртати дијаграме сила у пресеку.



Решење

Због скоковите промене дебљине плоче, као и услед температурних утицаја само на *плочи **I***, морамо да извршимо декомпозицију на две плоче:



Напонска функција за плочу ***I*** је једнака: $F_I = A_1 \cdot \ln r + B_1 \cdot r^2$.
Да вредности напонске функције, односно пресечних сила, не би биле бесконачне за ***r= 0***, константа A_1 мора да буде једнака нули.

$$F_I = B_1 \cdot r^2 ;\quad N_r^I = N_\varphi^I = 2 \cdot B_1$$

Напонска функција за плочу ***II*** је једнака: $F_{II} = A_2 \cdot \ln r + B_2 \cdot r^2$, док су изрази за пресечне силе: $N_r^{II} = \dfrac{A_2}{r^2} + 2 \cdot B_2$; $N_\varphi^{II} = -\dfrac{A_2}{r^2} + 2 \cdot B_2$.

Имамо три непознате константе које ћемо одредити из граничних и прелазних услова.

<u>*Гранични услови:*</u>

$$r = b \; \left\{ \; N_r^{II} = -p \right. \text{..............}(1)$$

<u>*Прелазни услови:*</u>

$$r = a \; \begin{cases} N_r^{I} = N_r^{II} \text{..............}(2) \\ u^{I} = u^{II} \text{.................}(3) \end{cases}$$

$$u^{I} = \varepsilon_\varphi^{I} \cdot r = \left[\frac{1}{E \cdot h_I} \cdot \left(N_\varphi^{I} - \nu \cdot N_r^{I} \right) + \alpha_t \cdot t \right] \cdot r \; ; \quad u^{II} = \varepsilon_\varphi^{II} \cdot r = \frac{1}{E \cdot h_{II}} \cdot \left(N_\varphi^{II} - \nu \cdot N_r^{II} \right) \cdot r$$

Систем три линеарне једначина са три непознате:

$$0.04 \cdot A_2 + 2 \cdot B_2 = -50 \text{.................................}(1)$$

$$2 \cdot B_1 - 0.25 \cdot A_2 - 2 \cdot B_2 = 0 \text{.............................}(2)$$

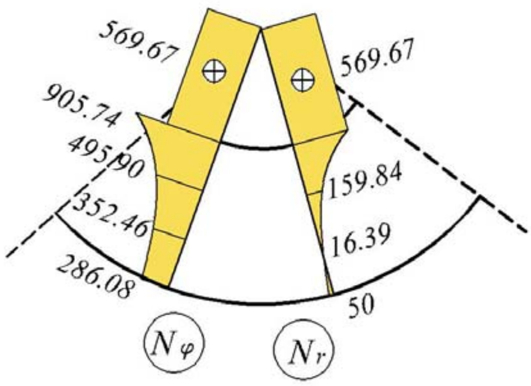
$$1.6 \cdot B_1 - 0.2\dot{6} \cdot A_2 + 3.2 \cdot B_2 = -600 \text{.................}(3)$$

Решење система: $B_1 = 284.836$; $A_2 = 2950.820$; $B_2 = -84.016$

Коначни изрази за пресечне силе су:

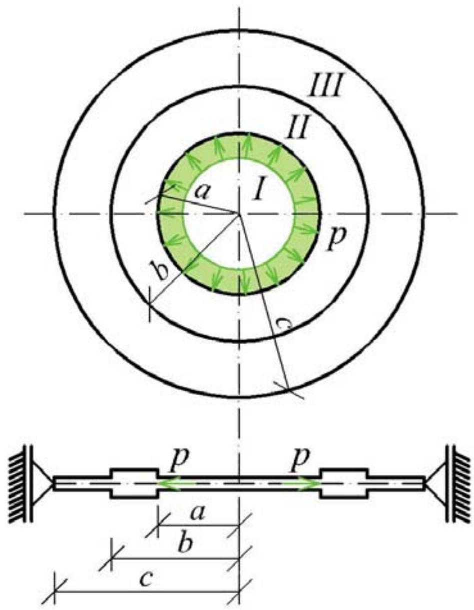
$$N_r^{I} = N_\varphi^{I} = 569.6724$$

$$N_r^{II} = 2950.82 \cdot \frac{1}{r^2} - 168.032 \; ; \quad N_\varphi^{II} = 2950.82 \cdot \frac{1}{r^2} + 168.032$$



Пример 3.

Услед задатог константног радијалног оптерећења ***p*** срачунати и нацртати дијаграме померања и сила у пресеку.



E=30 Gpa

ν= 0.2

$h_I = h_{III} = 0.15\ m$

$h_{II} = 0.20\ m$

p= 50 kN/m

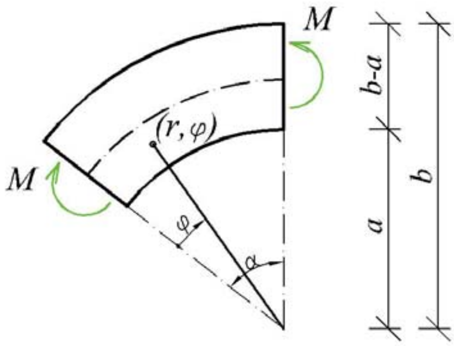
a = 2 m

b = 3 m

c = 5 m

Решење

Чисто савијање кружног лука



Расподела напона је иста у свим радијалним пресецима па могу да се користе решења за равно напрезање при ротационо симетричном оптерећењу.

$$F = D + A \cdot \ln r + B \cdot r^2 + C \cdot r^2 \cdot \ln r$$

$$N_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = A \cdot \frac{1}{r^2} + 2 \cdot B + C \cdot (1 + 2 \cdot \ln r)$$

$$N_\varphi = \frac{d^2F}{dr^2} = -A \cdot \frac{1}{r^2} + 2 \cdot B + C \cdot (3 + 2 \cdot \ln r)$$

И овде усвајамо вредност константе $D = 0$.

Гранични услови:

$$r = a: \quad N_r = 0 ....(1) \qquad \varphi = 0$$

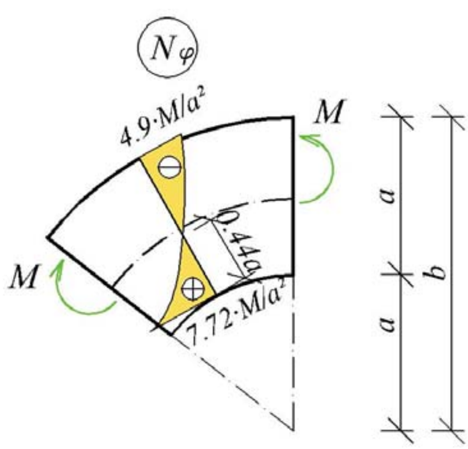
$$r = b: \quad N_r = 0 ....(2) \qquad \varphi = \alpha$$

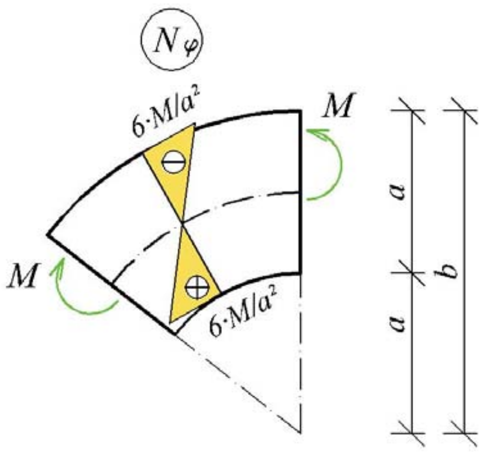
$$\begin{cases} \int\limits_{r=a}^{r=b} N_\varphi \cdot r \cdot dr = -M ....(3) \\ \int\limits_{r=a}^{r=b} N_\varphi \cdot dr = 0 ....(4) \end{cases}$$

Услов да је на свим контурама $N_{r\varphi} = 0$ је задовољен.

Имаћемо систем од три линеарне једначине са три непознате јер је *гранични услов (4)* идентички задовољен. Његовим решавањем добићемо вредности непознатих константи.

Дијаграми нормалне силе N_φ, одређени на претходно описан начин као и услед разматрања датог носача као гредног, за однос $\frac{b}{a} = 2$, су приказани на слици:





Љуске

Љуска је површинска конструкција која је ограничена са две криве површи на одстојању ***h*** које је мало у односу на остале димензије.

Безмоментна теорија љуски

Безмоментним или мембранским напрезањем називамо стање напрезања љуске када се услед оптерећења јављају само пресечне силе које леже у тангенцијалној равни на средњу површ.

Да би се остварило описано стање напрезања морају да буду испуњени следећи услови:

1. дебљина љуске је мала у односу на полупречник кривине срдње површи љуске $\frac{h}{R} << 1$

2. средња површ љуске је глатка крива

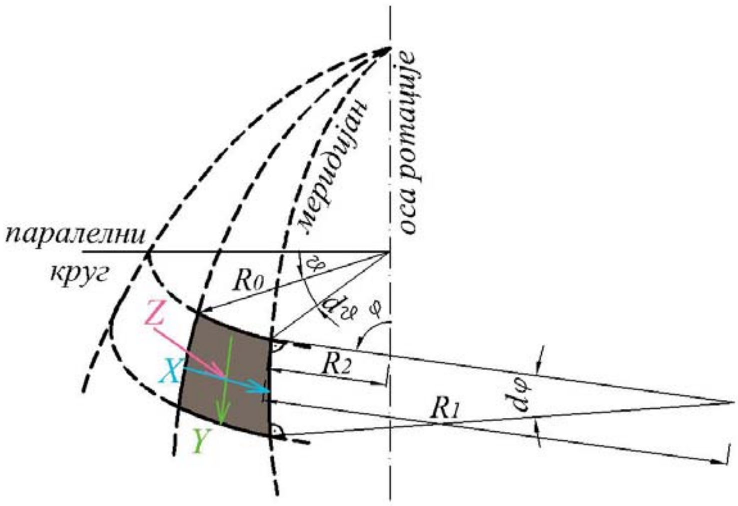
3. оптерећење је благо променљиво и без скокова

4. дебљина љуске је константна или континуално променљива

5. ослањање љуске на крајевима је такво да се на крајевима јављају само мембранске силе

Безмоментна теорија ротационих љуски

Ротационе љуске су оне чија је средња површ произвољна ротациона површ.



Криволинијске координате су:

φ- угао који заклапа нормала у посматраној тачки са осом ротације

ϑ- угао који одређује положај тачке на одговарајућем паралелном кругу

У свакој тачки средње површи постоје две главне кривине:

$\boldsymbol{R_1}$- полупречник кривине меридијана (први главни полупречник кривине)

$\boldsymbol{R_2}$- други главни полупречник кривине

$\boldsymbol{R_0}$- полупречник паралелног круга- пројекција полупречника $\boldsymbol{R_2}$ на раван паралелног круга

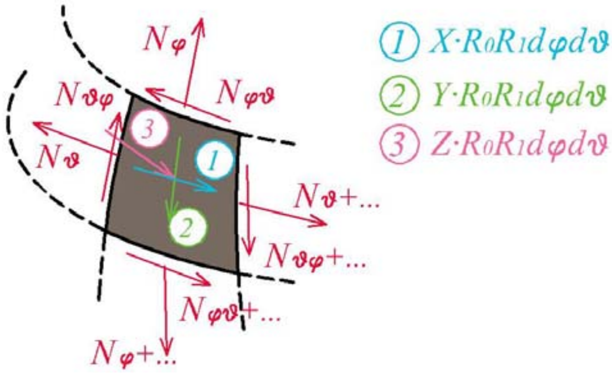
Површинско оптерећење има следеће компоненте:

X- оптерећење у правцу тангенте на меридијалну криву

Y- оптерећење у правцу тангенте на паралелни круг

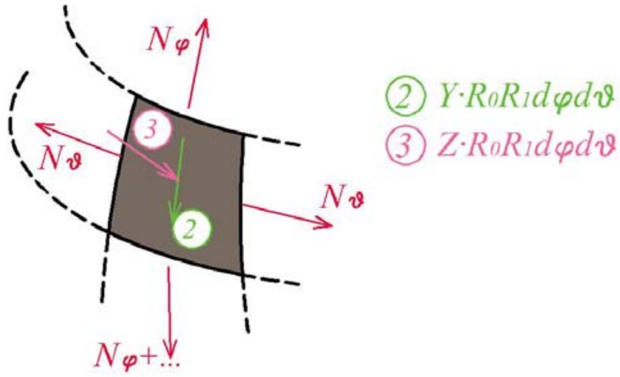
Z- оптерећење у правцу нормале средње површи у посматраној тачки

Пресечне силе које се јављају приказане су на слици:



<u>Безмоментна теорија ротационих љуски- ротациона симетрија</u>

Пресечне силе за случај ротационо симетричне конструкције и оптерећења, које неће зависити од координате ϑ, приказане су на слици:



Пресечне силе N_φ и N_ϑ могу да се одреде из услова равнотеже елемента љуске:

$\sum Y = 0$ - сума сила у правцу тангенте на меридијалну криву да је једнака нули

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi \cdot R_0\right) - N_\vartheta \cdot R_1 \cdot \cos\varphi + Y \cdot R_0 \cdot R_1 = 0 \text{ .... (1)}$$

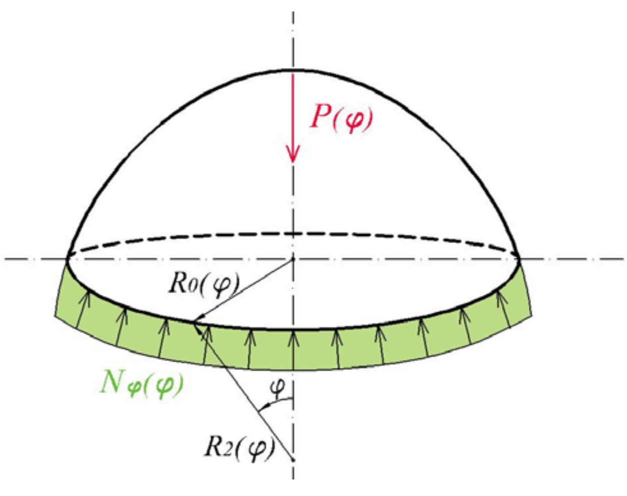
и $\sum Z = 0$ - сума сила у правцу нормале да је једнака нули

$$\frac{N_\varphi}{R_1} + \frac{N_\vartheta}{R_2} + Z = 0 \text{ .... (2)}$$

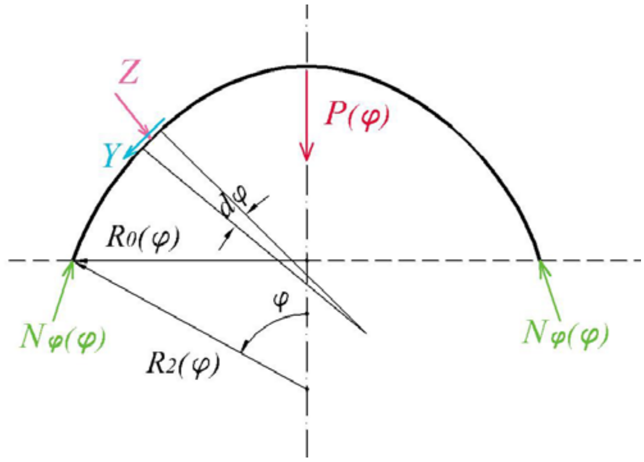
До решења за пресечну силу N_φ можемо да дођемо и разматрањем услова равнотеже, сума сила у правцу осе ротације, коначног дела љуске: $N_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_0 = P$, односно $N_\varphi = \dfrac{P}{\sin\varphi \cdot 2\pi \cdot R_0}$,

где су: $N_\varphi \cdot \sin\varphi$ - компонента силе N_φ у правцу осе ротације

P - резултанта површинског оптерећења која делује на издвојени део љуске



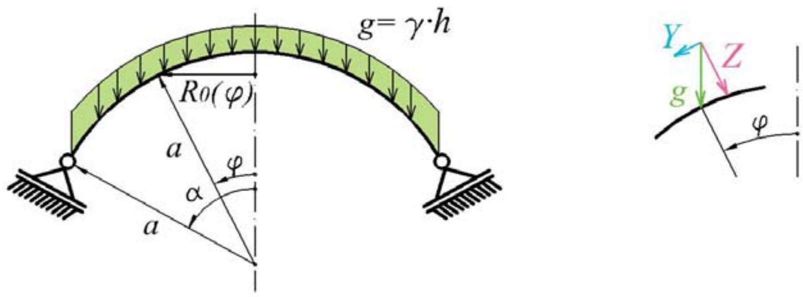
Да бисмо одредили $P(\varphi)$ посматраћемо пресек љуске и равни која садржи осу ротације:



$$P(\varphi) = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\varphi} R_0 \cdot R_1 \cdot (Y \cdot \sin\varphi + Z \cdot \cos\varphi) \cdot d\varphi$$

<u>Пример 1.</u>

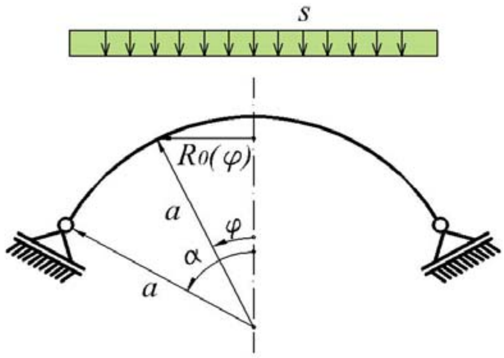
За сферну куполу оптерећену сопственом тежином, приказану на слици, одредити изразе за пресечне силе.



<u>Решење</u>

Пример 2.

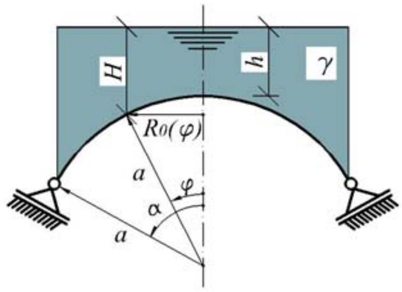
За сферну куполу оптерећену снегом, приказану на слици, одредити изразе за пресечне силе.



Решење

Пример 3.

За сферну куполу оптерећену водом, приказану на слици, одредити изразе за пресечне силе.



Решење